Abbiamo parlato di limiti e di successioni limitate. Ora vediamo le proprietà dei limiti:

- Unicità: se una successione $\{a_n\}$ ha limite L, non può averne altri.

dim. Se fosse $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = L'$, con $L \neq L'$, scelto $\varepsilon \in \left]0, \frac{|L-L'|}{2}\right[$, esisterebbero $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ $\forall n \geq \nu$, e $\nu' \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L'| < \varepsilon$ $\forall n \geq \nu'$. Posto $\bar{\nu} = \max\{\nu, \nu'\}$, per $n \geq \bar{\nu}$ avremmo

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |a_n - L| + |a_n - L'| < 2\varepsilon < |L - L'|,$$

il che è assurdo. $\square$

- Algebra dei limiti: se $\{a_n\}$ ha limite L e $\{b_n\}$ ha limite M, allora

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm M, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = LM.$$

dim. Sia $\varepsilon > 0$. Esistono $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ tali che $|a_n - L| < \varepsilon$, $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$. Allora

$$|a_n \pm b_n - (L \pm M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$

$$|a_n b_n - LM| \leq |a_n - L|\,|b_n| + |L|\,|b_n - M| \quad \forall n \geq \nu,$$

e ricordando che $\{b_n\}$, avendo limite, è limitata, si ha per $n \geq \nu$

$$|a_n b_n - LM| \leq |a_n - L| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| + |L|\,|b_n - M| < \varepsilon\left(|L| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n|\right).$$

Poiché ε è arbitrario, l'ultimo membro è arbitrariamente piccolo. Ne segue la tesi. $\square$

<u>Osservazione</u> Il risultato precedente si estende al caso di limiti $\pm\infty$, <u>ad eccezione</u> delle forme indeterminate $+\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, nel qual caso può succedere qualunque cosa.

<u>Esempi</u> (1) Se $a_n = n$, $b_n = \alpha n$, con $\alpha > 0$, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

(2) Se $a_n = n$, $b_n = (-1)^n + n$, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) \text{ non esiste.}$$

(3) Se $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha > 0$, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1, \end{cases}$$

(4) Se $a_n = n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n \text{ non esiste.}$$

• <u>Algebra dei limiti (bis)</u>: se $\{a_n\}$ ha limite L, e $\{b_n\}$ ha limite $M \neq 0$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}.$$

<u>dim</u>. Scelto $\varepsilon \in \left]0, \frac{|M|}{2}\right[$, esistono $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ tali che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$. In particolare, per ogni $n \geq \nu$

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq |M| - \varepsilon > \frac{|M|}{2}.$$

Ne segue, sempre per $n \geq \nu$,

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{L}{M}\right| = \frac{|a_n M - b_n L|}{|b_n|\,|M|} = \frac{|(a_n-L)M + L(M-b_n)|}{|b_n|\,|M|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_n-L|\,|M| + |L|\,|b_n-M|}{\frac{M^2}{2}} \leq \varepsilon\, 2\,\frac{|M|+|L|}{M^2}$$

e dunque la tesi. $\square$

- Variante: Se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ ha limite 0, allora

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0.$$

dim. Sia $K = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, sia $\varepsilon > 0$. Esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|b_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Ne segue

$$|a_n b_n| \leq K\varepsilon \quad \forall n \geq \nu. \quad \square$$

- Permanenza del segno: Se $\{a_n\}$ ha limite $L \neq 0$, allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \neq 0$ $\forall n \geq \nu$.

dim. Scelto $\varepsilon < \frac{|L|}{2}$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n| = |a_n - L + L| \geq |L| - |a_n - L| > |L| - \varepsilon > \frac{|L|}{2} > 0.$$

Quindi $a_n \neq 0$ per $n \geq \nu$. $\square$

- Conseguenza: se $\{a_n\}$ ha limite $L \neq 0$, e se $\{b_n\}$ è positiva con limite 0, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0 \\ -\infty & \text{se } L < 0. \end{cases}$$

dim. Sia $M > 1$, sia $\varepsilon \in \left]0, \frac{|L|}{2M}\right[$. Esistono $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ tali che $0 < b_n < \varepsilon$ e $|a_n| \geq |L| - |a_n - L| > \frac{|L|}{2}$ per ogni $n \geq \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$. Perciò

$\frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2\varepsilon} > M$ se $L>0$, $\frac{a_n}{b_n} < \frac{-L}{2\varepsilon} < -M$ se $L<0$. □

• Successioni monotòne.

Definizione Sia $\{a_n\}$ una successione reale. Diciamo che:

$\{a_n\}$ è crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\{a_n\}$ è decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\{a_n\}$ è strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\{a_n\}$ è strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

• L'avverbio "definitivamente": diciamo che una proprietà $p(n)$, definita su $\mathbb{N}$, è definitivamente vera se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $p(n)$ è vera per ogni $n \geq \nu$.

Esempio (1) Si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se e solo se per ogni $\varepsilon>0$ risulta

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

(2) Si dice che $\{a_n\}$ è definitivamente crescente se

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ definitivamente.}$$

Analoga definizione per le successioni definitivamente decrescenti o strettamente crescenti o strettamente decrescenti.

Di particolare importanza sono le successioni (definitivamente) monotone e limitate.

<u>Teorema</u>. Sia $\{a_n\}$ una successione limitata.

(i) Se $\{a_n\}$ è anche crescente, allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

(ii) Se $\{a_n\}$ è anche decrescente, allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

<u>dim</u> (i) Sia $K = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$; supponiamo $K\in\mathbb{R}$. In questo caso risulta $a_n \le K$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, e per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che $K-\varepsilon < a_\nu \le K$; per monotonia, dunque,

$$K-\varepsilon < a_\nu \le a_n \le K \quad \forall n \ge \nu,$$

e ciò prova la tesi. Se $K=\infty$, allora per ogni $M>0$ esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che $a_\nu > M$, e per monotonia

$$a_n \ge a_\nu > M \quad \forall n\ge\nu :$$

ciò, nuovamente, prova la tesi.

(ii) analogo, con le dovute modifiche. □

<u>Esercizi</u>

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-8}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3}{3n^5+8\cos^2 n+2}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{4+2n-n^2}{n}$.
- Quale è limitata, quale no?

  $\sqrt{n^2-n}$, $\frac{\cos 2n}{n}$, $\sqrt{n^2-n}-n$, $(-1)^n\left(\frac{3}{\pi}\right)^n$, $(-1)^n\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{n}}$.

- Per ciascuna di queste successioni

$$(-1)^n \cos \pi n, \quad \sqrt[n]{n}, \quad \frac{n-10}{5n}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \cos \frac{\pi}{2} n, \quad (-2)^n,$$

stabilire quali delle seguenti proprietà valgono definitivamente:

(a) i termini della successione sono positivi,

(b) i termini della successione sono maggiori di un certo $m>0$,

(c) i termini della successione sono minori di un certo $M>0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1+(-1)^n\right] n^{(-1)^{n+1}}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n^{\left[\frac{1}{n}\right]-1}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 2n}{n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{2n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{27n^3+n^2}}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right]$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin \frac{1}{n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(1-\cos \frac{1}{n}\right)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+10^n}{n^3+2^n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{n-2^{\frac{1}{n}}}$,

- Posto $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n+5}{n+1}$, calcolare $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e dire se converge o no.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{7/4} + \log_{10}(n^5+1)}{n \log_{10} n^n + \sqrt{n^3+1}}$.

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$. È vero il viceversa?

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. È vero il viceversa? Che succede se $L=0$?

- Siano $a_1,\dots,a_n, b_1,\dots b_n$ numeri non negativi. La media geometrica è <u>superadditiva</u>, cioè

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1\cdots b_n}.$$

<u>dim.</u> Si ha, essendo $G_n \leq A_n$,

$$\frac{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right) = 1 \ \square.$$

- <u>Proposizione</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Posto $L = \sup E$, esiste una successione $\{a_n\} \subseteq E$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

<u>dim</u> Sia $L \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poichè $L-\frac{1}{n}$ non è un maggiorante per E, esiste $a_n \in E$ tale che $L-\frac{1}{n} < a_n \leq L$. Sia $\varepsilon > 0$: scelto $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ si ha, per $n \geq \nu$, $L-\varepsilon < L-\frac{1}{\nu} \leq L-\frac{1}{n} < a_n < L$. Dunque $a_n \to L$ per $n\to\infty$.

Il caso $L=+\infty$ è simile e più facile. $\square$