La matematica dell'arcobaleno

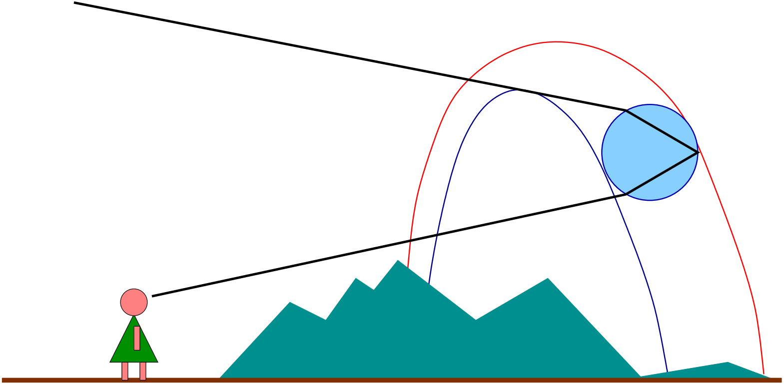
Alberto Abbondandolo

Università di Pisa

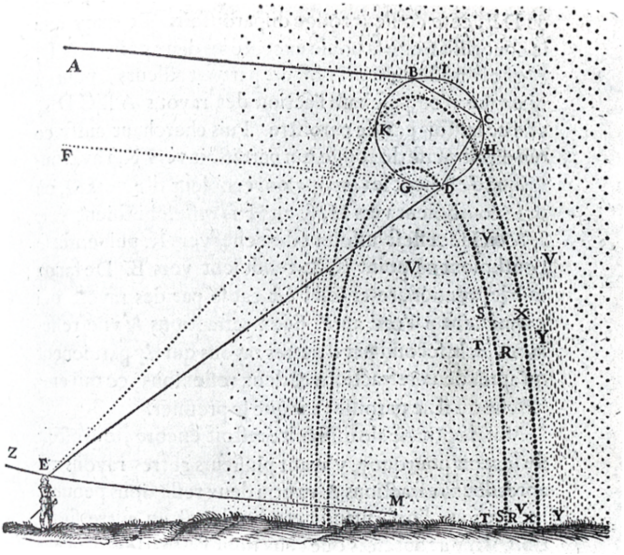
Open Week 2011

Un arcobaleno

Spiegazione



È la spiegazione di Cartesio (1596-1650)



Il modello di Cartesio

Il modello di Cartesio

- gocce d'acqua sferiche (non necessariamente dello stesso raggio);

Il modello di Cartesio

- gocce d'acqua sferiche (non necessariamente dello stesso raggio);
- rifrazione nei passaggi aria-acqua e acqua-aria: se i e r sono gli angoli che il raggio incidente e il raggio rifratto formano con la normale alla superficie che separa i due mezzi, si ha la relazione
$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$
dove n è il coefficiente di rifrazione, che vale circa $1{,}33$ per il passaggio aria-acqua ed il reciproco di questo numero, $1/1{,}33 = 0{,}75$ per il passaggio inverso.

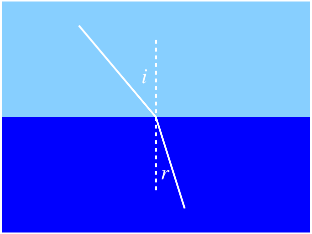
Il modello di Cartesio

- gocce d'acqua sferiche (non necessariamente dello stesso raggio);
- rifrazione nei passaggi aria-acqua e acqua-aria: se i e r sono gli angoli che il raggio incidente e il raggio rifratto formano con la normale alla superficie che separa i due mezzi, si ha la relazione
$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$
dove n è il coefficiente di rifrazione, che vale circa 1,33 per il passaggio aria-acqua ed il reciproco di questo numero, $1/1{,}33 = 0{,}75$ per il passaggio inverso.
- nella riflessione sul fondo della goccia l'angolo del raggio incidente e quello del raggio riflesso coincidono.

Rifrazione e riflessione

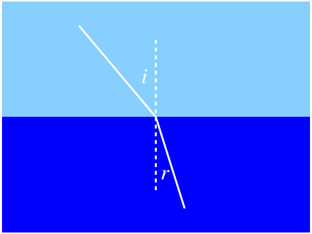
Rifrazione e riflessione

- nella rifrazione $\dfrac{\sin i}{\sin r} = n$.

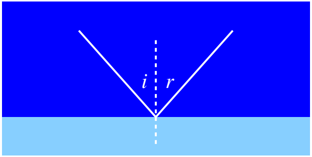


Rifrazione e riflessione

- nella rifrazione $\frac{\sin i}{\sin r} = n$.

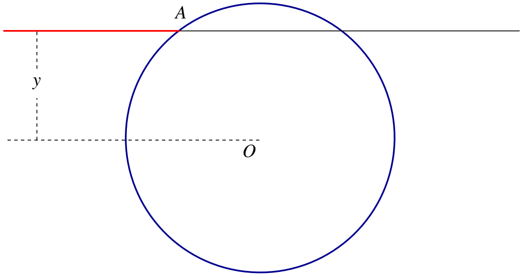


- nella riflessione $i = r$.

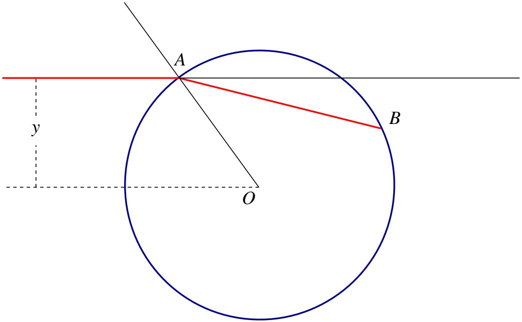


Deviazione totale causata da una goccia

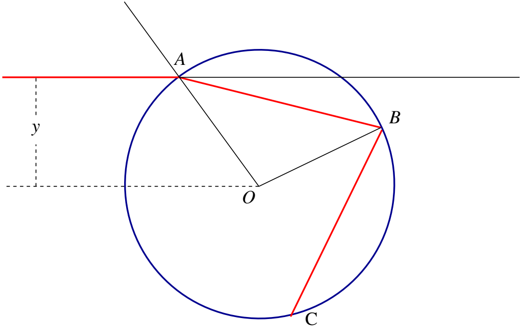
Deviazione totale causata da una goccia



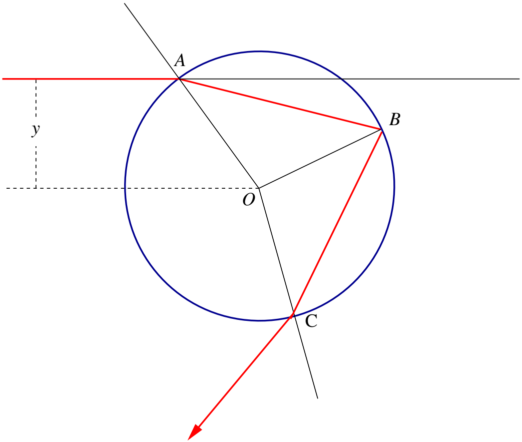
Deviazione totale causata da una goccia



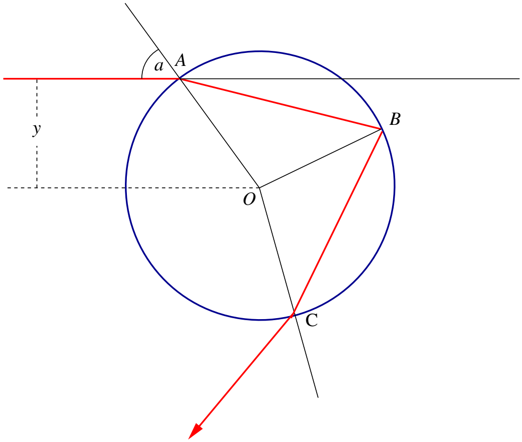
Deviazione totale causata da una goccia



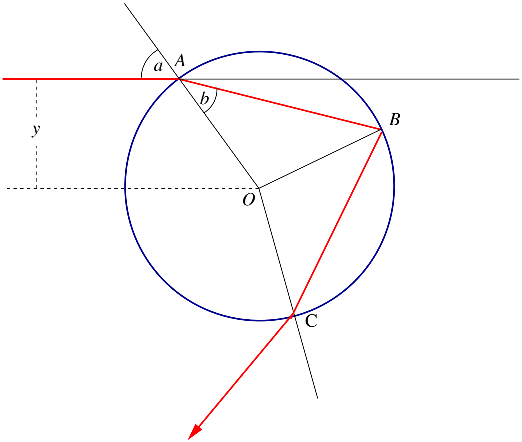
Deviazione totale causata da una goccia



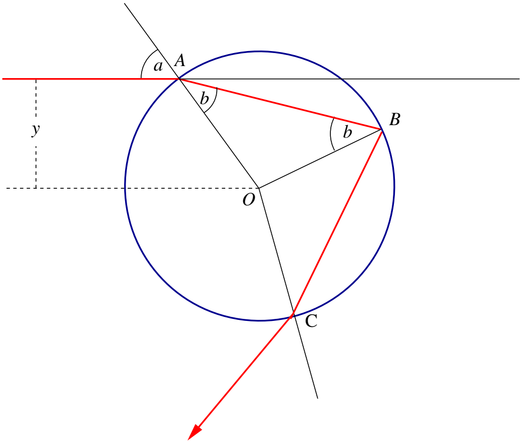
Deviazione totale causata da una goccia



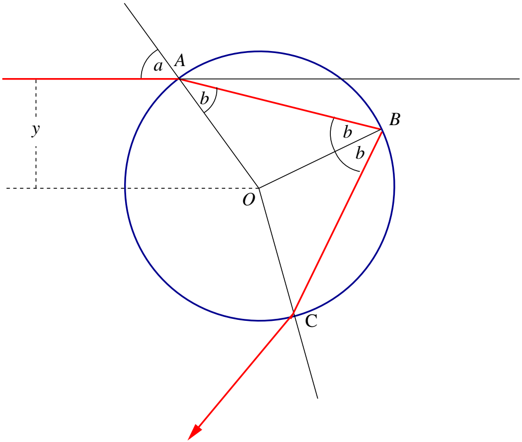
Deviazione totale causata da una goccia



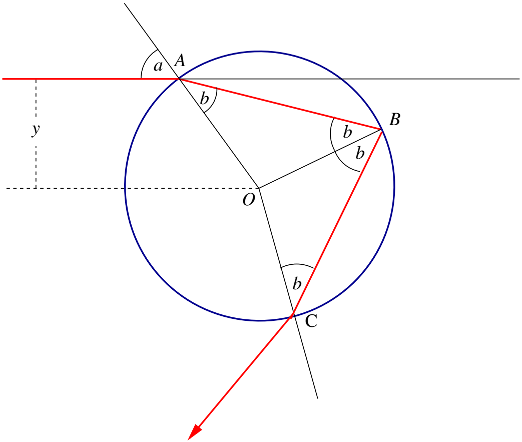
Deviazione totale causata da una goccia



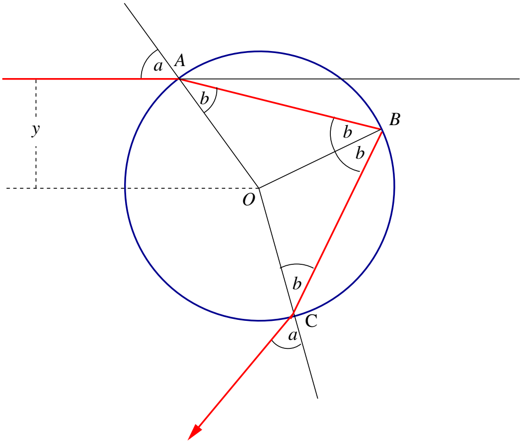
Deviazione totale causata da una goccia



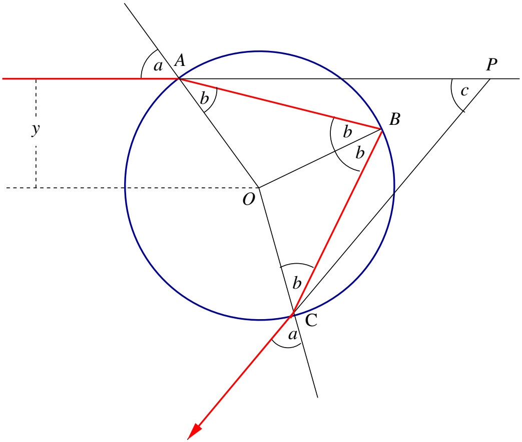
Deviazione totale causata da una goccia



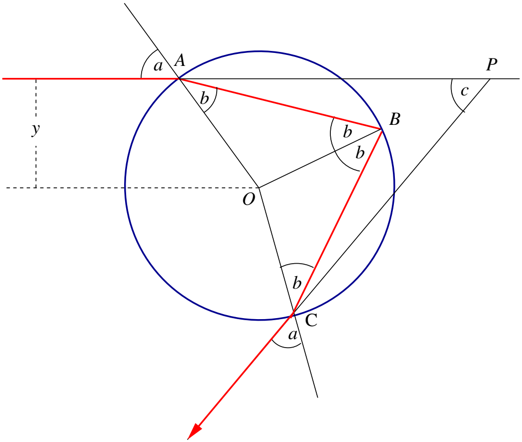
Deviazione totale causata da una goccia



Deviazione totale causata da una goccia

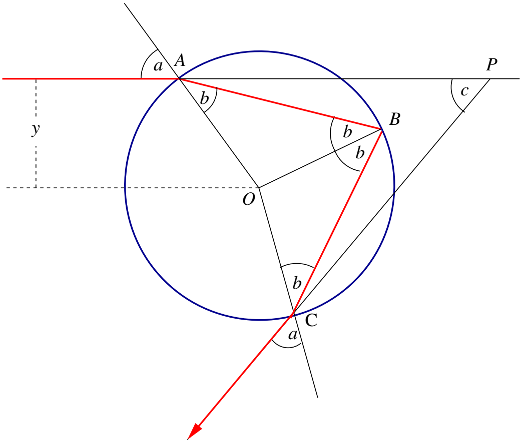


Deviazione totale causata da una goccia



$$\widehat{AOC} = 2(\pi - 2b) = 2\pi - 4b.$$

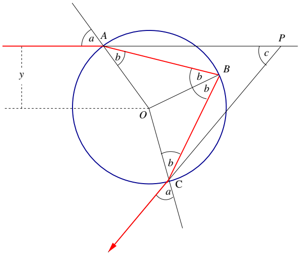
Deviazione totale causata da una goccia



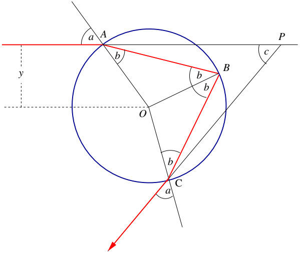
$\widehat{AOC} = 2(\pi - 2b) = 2\pi - 4b.$

$a + a + 2\pi - 4b + c = 2\pi$, quindi $c = 4b - 2a$.

Come c dipende da y

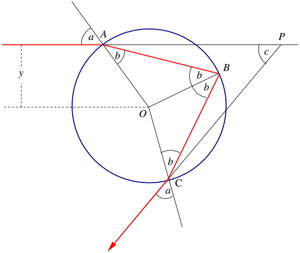


Come c dipende da y



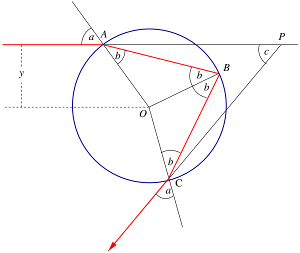
Se R è il raggio della goccia, risulta $y = R \sin a$.

Come c dipende da y



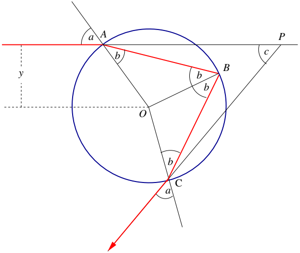
Se R è il raggio della goccia, risulta $y = R \sin a$.
Inoltre $\sin a = n \sin b$, con $n = 1,33$.

Come c dipende da y



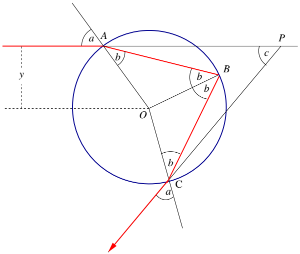
Se R è il raggio della goccia, risulta $y = R \sin a$.
Inoltre $\sin a = n \sin b$, con $n = 1,33$.
Come abbiamo appena visto, $c = 4b - 2a$.

Come c dipende da y



Se R è il raggio della goccia, risulta $y = R \sin a$.
Inoltre $\sin a = n \sin b$, con $n = 1,33$.
Come abbiamo appena visto, $c = 4b - 2a$.
Da queste 3 equazioni ricaviamo c in funzione di y:

Come c dipende da y



Se R è il raggio della goccia, risulta $y = R \sin a$.
Inoltre $\sin a = n \sin b$, con $n = 1,33$.
Come abbiamo appena visto, $c = 4b - 2a$.
Da queste 3 equazioni ricaviamo c in funzione di y:

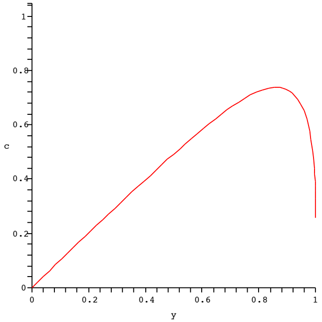
$$c(y) = 4b - 2a = 4 \arcsin \frac{\sin a}{n} - 2 \arcsin \sin a = 4 \arcsin \frac{y}{nR} - 2 \arcsin \frac{y}{R}.$$

Comportamento della funzione $c(y)$

$$c(y) = 4 \arcsin \frac{y}{nR} - 2 \arcsin \frac{y}{R}, \qquad 0 \leq y \leq R.$$

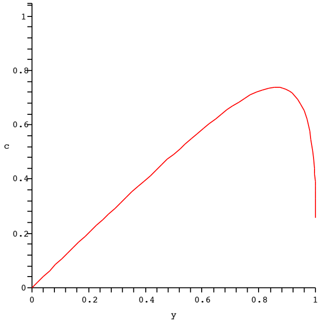
Comportamento della funzione $c(y)$

$$c(y) = 4 \arcsin \frac{y}{nR} - 2 \arcsin \frac{y}{R}, \qquad 0 \leq y \leq R.$$



Comportamento della funzione $c(y)$

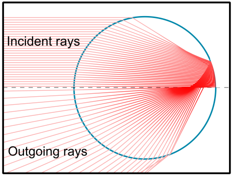
$$c(y) = 4 \arcsin \frac{y}{nR} - 2 \arcsin \frac{y}{R}, \qquad 0 \leq y \leq R.$$



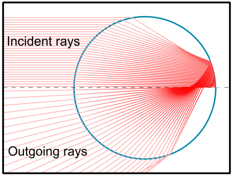
Il massimo di $c(y)$ vale

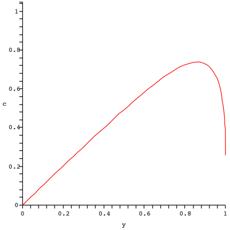
$$\overline{c} = 4 \arcsin \frac{1}{n} \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Una prima conseguenza

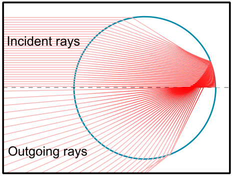


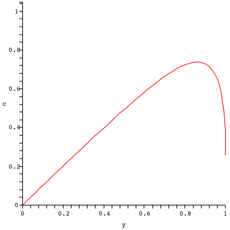
Una prima conseguenza





Una prima conseguenza





Una conseguenza dei nostri calcoli è che la luce riflessa dalle gocce proviene dalla parte bassa del cielo.

Chiaroscuri

Dove appare l'arcobaleno?

Dove appare l'arcobaleno?

Sull'angolo

$$\overline{c} = 4 \arcsin \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

si concentrano molti raggi luminosi.

Dove appare l'arcobaleno?

Sull'angolo

$$\overline{c} = 4 \arcsin \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

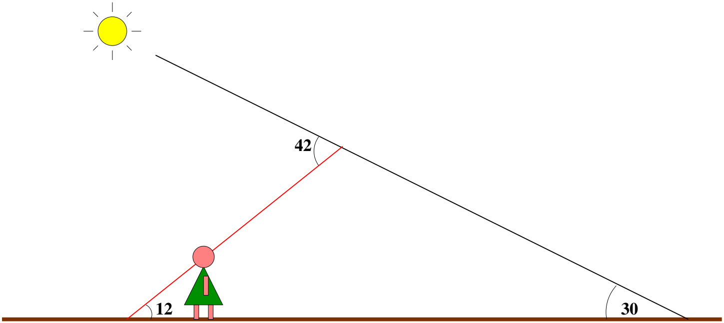
si concentrano molti raggi luminosi.
Sostituendo $n = 1,33$ troviamo $\overline{c} = 0,74$ radianti, ossia circa 42 gradi.

Dove appare l'arcobaleno?

Sull'angolo

$$\overline{c} = 4 \arcsin \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

si concentrano molti raggi luminosi.
Sostituendo $n = 1,33$ troviamo $\overline{c} = 0,74$ radianti, ossia circa 42 gradi.



E i colori?

E i colori?

Raffiniamo il modello di Cartesio:

E i colori?

Raffiniamo il modello di Cartesio:

- La luce solare è costituita dalla sovrapposizione di tutti i colori.

E i colori?

Raffiniamo il modello di Cartesio:

- La luce solare è costituita dalla sovrapposizione di tutti i colori.
- La costante di rifrazione n varia leggermente da colore a colore, secondo la tabella:

1.34451	
1.34235	
1.34055	
1.33903	
1.34235	
1.33659	
1.3356	
1.33472	
1.33393	
1.33322	
1.33257	
1.33197	
1.33141	

I colori

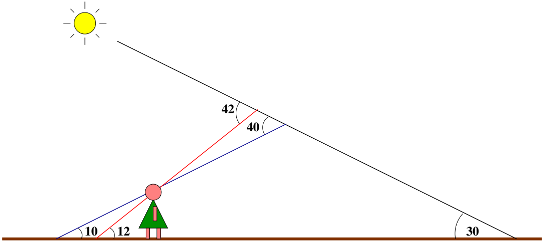
Usando il valore $n = 1,33141$ del coefficiente di rifrazione della luce rossa, troviamo il valore $\overline{c} = 0,73845 = 42,31^0$.

I colori

Usando il valore $n = 1,33141$ del coefficiente di rifrazione della luce rossa, troviamo il valore $\overline{c} = 0,73845 = 42,31^0$.
Usando il valore $n = 1,34451$ del coefficiente di rifrazione della luce violetta, troviamo il valore $\overline{c} = 0,70569 = 40,43^0$.

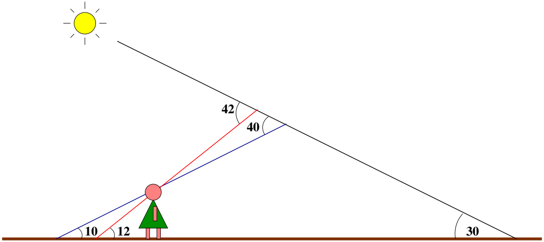
I colori

Usando il valore $n = 1,33141$ del coefficiente di rifrazione della luce rossa, troviamo il valore $\overline{c} = 0,73845 = 42,31^0$.
Usando il valore $n = 1,34451$ del coefficiente di rifrazione della luce violetta, troviamo il valore $\overline{c} = 0,70569 = 40,43^0$.



I colori

Usando il valore $n = 1,33141$ del coefficiente di rifrazione della luce rossa, troviamo il valore $\overline{c} = 0,73845 = 42,31^0$.
Usando il valore $n = 1,34451$ del coefficiente di rifrazione della luce violetta, troviamo il valore $\overline{c} = 0,70569 = 40,43^0$.



Quindi la striscia rossa appare all'esterno dell'arco e quelle violetta all'interno.

L'arcobaleno di prima

Un altro arcobaleno

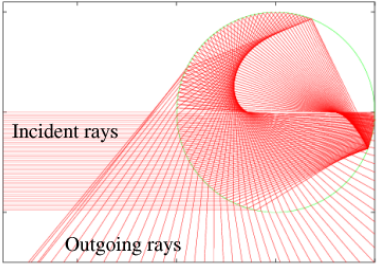
Spiegazione

Spiegazione

Il secondo arcobaleno è formato da quei raggi che subiscono una doppia riflessione all'interno della goccia.

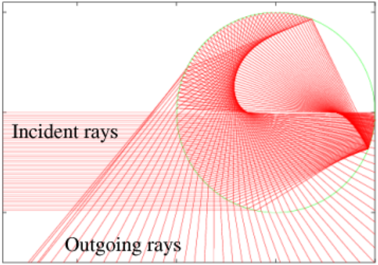
Spiegazione

Il secondo arcobaleno è formato da quei raggi che subiscono una doppia riflessione all'interno della goccia.



Spiegazione

Il secondo arcobaleno è formato da quei raggi che subiscono una doppia riflessione all'interno della goccia.



Con calcoli simili ai precedenti si trova che la luce proveniente dal secondo arcobaleno forma angoli tra i 50^0 e i 53^0 con la direzione della luce solare.

C'è dell'altro?

Strisce supplementari ancora più visibili

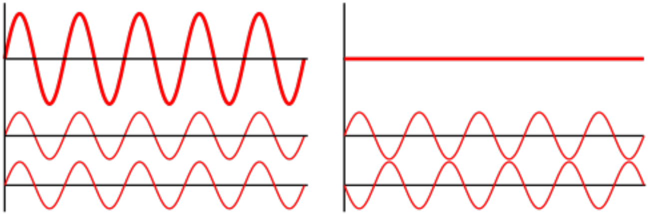
Il modello ondulatorio

Il modello ondulatorio

- La luce è composta da onde, che interferiscono rafforzandosi (interferenza costruttiva), oppure cancellandosi (interferenza distruttiva).

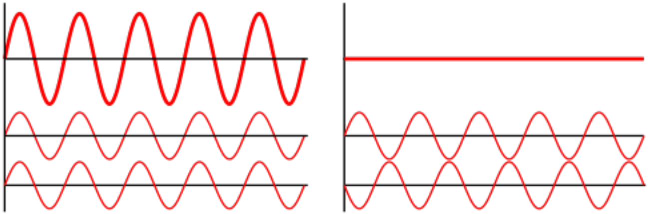
Il modello ondulatorio

- La luce è composta da onde, che interferiscono rafforzandosi (interferenza costruttiva), oppure cancellandosi (interferenza distruttiva).



Il modello ondulatorio

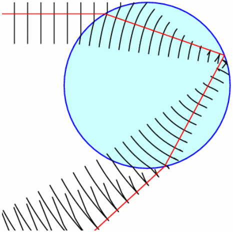
- La luce è composta da onde, che interferiscono rafforzandosi (interferenza costruttiva), oppure cancellandosi (interferenza distruttiva).



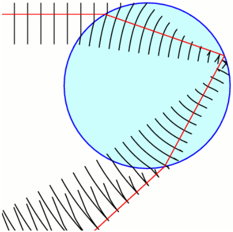
- Le diverse lunghezze d'onda sono responsabili dei colori.

La spiegazione di George Biddel Airy (1801-1892)

La spiegazione di George Biddel Airy (1801-1892)

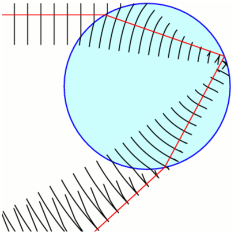


La spiegazione di George Biddel Airy (1801-1892)

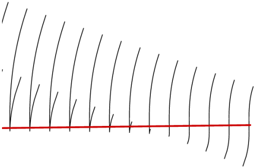


Il problema può essere ridotto al seguente: come evolve un fronte d'onda forma di S?

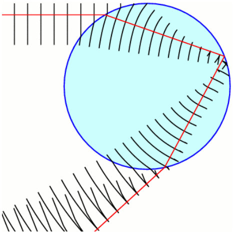
La spiegazione di George Biddel Airy (1801-1892)



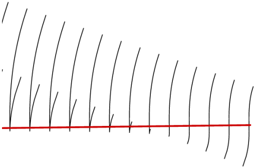
Il problema può essere ridotto al seguente: come evolve un fronte d'onda forma di S?



La spiegazione di George Biddel Airy (1801-1892)



Il problema può essere ridotto al seguente: come evolve un fronte d'onda forma di S?



Principio di Huygens: l'evoluzione è la stessa che si avrebbe se il fronte d'onda di partenza fosse costituito da sorgenti puntiformi.

La matematica necessaria

La matematica necessaria

Airy arriva alla seguente formula per l'ampiezza delle onde che ci arrivano lungo una retta che forma un angolo x con la direzione della luce solare:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{2}(s^3 - xs)\, ds.$$

La matematica necessaria

Airy arriva alla seguente formula per l'ampiezza delle onde che ci arrivano lungo una retta che forma un angolo x con la direzione della luce solare:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{2}(s^3 - xs)\, ds.$$

Questo integrale non si calcola esplicitamente. Augustus De Morgan (1806-1871) ha dimostrato questo sviluppo asintotico per $A(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) = \quad & \tfrac{\sqrt{3}}{6}\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3}\tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{1\cdot 4}{3^2}\tfrac{x^6}{6!} - \tfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3}\tfrac{x^9}{9!} + \dots\right) \\ & + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(x - \tfrac{2}{3}\tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{2\cdot 5}{3^2}\tfrac{x^7}{7!} - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3^3}\tfrac{x^{10}}{10!} + \dots\right). \end{aligned}$$

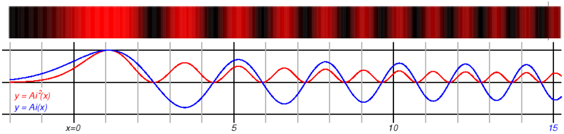
La matematica necessaria

Airy arriva alla seguente formula per l'ampiezza delle onde che ci arrivano lungo una retta che forma un angolo x con la direzione della luce solare:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{2}(s^3 - xs)\, ds.$$

Questo integrale non si calcola esplicitamente. Augustus De Morgan (1806-1871) ha dimostrato questo sviluppo asintotico per $A(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) = \quad & \frac{\sqrt{3}}{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 4}{3^2}\frac{x^6}{6!} - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3}\frac{x^9}{9!} + \dots\right) \\ & + \frac{\sqrt{3}}{6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\frac{x^4}{4!} + \frac{2\cdot 5}{3^2}\frac{x^7}{7!} - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^3}\frac{x^{10}}{10!} + \dots\right). \end{aligned}$$



Per saperne di più

Per saperne di più

- H. Nussenzveig, *L'arcobaleno*, Le Scienze, Agosto 1977. Traduzione da *The theory of the rainbow*, Scientific American, Aprile 1977.

Per saperne di più

- H. Nussenzveig, *L'arcobaleno*, Le Scienze, Agosto 1977. Traduzione da *The theory of the rainbow*, Scientific American, Aprile 1977.
- B. Casselman, *The mathematics of rainbows*, Feature Column dell'American Mathematical Society.

  http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows

Per saperne di più

- H. Nussenzveig, *L'arcobaleno*, Le Scienze, Agosto 1977. Traduzione da *The theory of the rainbow*, Scientific American, Aprile 1977.
- B. Casselman, *The mathematics of rainbows*, Feature Column dell'American Mathematical Society.

  http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows
- L. Roi, *Elementi di... arcobaleno*, pagina web dell'autore:

  http://www.lorenzoroi.net/arcobaleno/index.html

Per saperne di più

- H. Nussenzveig, *L'arcobaleno*, Le Scienze, Agosto 1977. Traduzione da *The theory of the rainbow*, Scientific American, Aprile 1977.
- B. Casselman, *The mathematics of rainbows*, Feature Column dell'American Mathematical Society.

  http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows
- L. Roi, *Elementi di... arcobaleno*, pagina web dell'autore:

  http://www.lorenzoroi.net/arcobaleno/index.html

Concludiamo con qualche immagine di arcobaleno.


LIFE