

MATEMATICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

QUARTO SCRITTO

31 gennaio 2011

Nome e cognome

Matricola

ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.

ISTRUZIONI: Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *Possono esistere due eventi A e B di uno spazio degli eventi Ω tali che*

$$p(A) = \frac{1}{8}, \quad p(B) = \frac{1}{7} \quad e \quad p(A \cup B) = \frac{17}{56} ?$$

Esercizio 1.2. *Se una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari, è anche necessariamente surgettiva? Se sì dimostrarlo, altrimenti trova un esempio di una funzione dispari non surgettiva.*

Esercizio 1.3. *Determina il dominio e calcola la derivata della seguente funzione:*

$$f(t) = \log((1 + \cos t)^2) .$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. Il codice (PIN) di accesso a un cellulare è dato da 4 simboli, che possono essere o cifre (da 0 a 9) o lettere (di un alfabeto di 26 lettere).

- (1) Quanti sono i possibili codici?
- (2) Qual è la probabilità che tutti i simboli di un codice preso a caso siano lettere? E che tutti i simboli siano cifre?
- (3) Qual è la probabilità che nelle prime due posizioni di un codice preso a caso vi sia la coppia ordinata "1A"? E "11"?
- (4) Qual è la probabilità che un codice preso a caso contenga esattamente due cifre e due lettere?

Esercizio 2.2. Una ditta produce due prodotti (X e Y) usando due macchinari (A e B). Ogni unità del prodotto X richiede 48 minuti di lavorazione con il macchinario A , e 45 minuti di lavorazione con il macchinario B . Ogni unità del prodotto Y richiede 24 minuti di lavorazione con il macchinario A , e 15 minuti di lavorazione con il macchinario B .

All'inizio di questa settimana la ditta ha in magazzino 30 unità del prodotto X e 90 unità del prodotto Y . Inoltre, la ditta prevede durante la settimana di poter utilizzare il macchinario A per al massimo 40 ore, e il macchinario B per al massimo 35 ore. Infine, al termine della settimana la ditta deve avere a disposizione almeno 60 unità del prodotto X e almeno 95 unità del prodotto Y .

Determina come deve procedere la ditta per massimizzare il numero totale di unità di prodotto che può fabbricare questa settimana soddisfacendo i vincoli indicati.

Esercizio 2.3. Uno studio tossicologico suggerisce che la quantità Q di antidoto necessaria per contrastare l'effetto nocivo di una quantità t di tossina possa essere determinata dall'espressione

$$Q(t) = \log \left(\frac{1+t^2}{t-1} \right).$$

- (1) Studia la funzione Q .
- (2) Per quali valori della quantità t di tossina tale funzione può effettivamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?
- (3) Calcola

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{\log t}.$$