

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B  
PROF. MARCO ABATE

QUINTO SCRITTO

18 gennaio 2010

Nome e cognome

Matricola

**ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.**

*ISTRUZIONI:* Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

1. PARTE I

**Esercizio 1.1.** Un tuo amico asserisce che bere quattro cognac di seguito fa passare il singhiozzo. Cosa devi fare per convincerlo senza ombra di dubbio che ha torto?

**Esercizio 1.2.** La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = x^4$  è iniettiva?

**Esercizio 1.3.** Calcola l'integrale definito

$$\int_{-1}^1 (t^3 + \sin t) dt .$$

## 2. PARTE II

**Esercizio 2.1.** Il colore degli occhi una specie di mandrilli è determinato geneticamente da un gene con tre possibili alleli: l'allele "M" marrone, l'allele "N" nero, e l'allele "V" verde. L'allele "N" è dominante sugli altri due; invece il genotipo "MV" produce dei mandrilli con occhi gialli. La popolazione dei mandrilli che stai studiando soddisfa le ipotesi della legge di Hardy-Weinberg, e sai che il 36% dei mandrilli nella popolazione ha gli occhi neri, il 36% ha gli occhi marroni, il 4% ha gli occhi verdi e il 24% ha gli occhi gialli.

- (1) Calcola la probabilità di tutti gli alleli e di tutti i genotipi.
- (2) Qual è la probabilità che un mandrillo preso a caso nella popolazione abbia gli occhi gialli sapendo che il padre ha gli occhi marroni e la madre ha gli occhi gialli?
- (3) Qual è la probabilità che un mandrillo preso a caso nella popolazione abbia gli occhi gialli sapendo che entrambi i genitori hanno gli occhi neri?
- (4) Qual è la probabilità che un mandrillo preso a caso nella popolazione abbia gli occhi gialli sapendo che entrambi i genitori hanno gli occhi marroni?

**Esercizio 2.2.** Stai studiando l'apparato digerente dei lombrichi comuni, e ti interessa il tempo di digestione di 1 grammo di cibo in funzione dello spessore del lombrico. Effettuando tre esperimenti trovi le seguenti coppie (spessore del lombrico, tempo di digestione):

$$(1 \text{ mm}, 15 \text{ ore}), \quad (1.5 \text{ mm}, 12 \text{ ore}), \quad (2 \text{ mm}, 6 \text{ ore}).$$

Supponendo che la dipendenza del tempo di digestione dallo spessore del lombrico sia quadratica, trova la funzione quadratica che meglio interpola i tuoi dati. Per quali spessori il modello da te trovato è ragionevole?

**Esercizio 2.3.** Nella chimica computazionale l'interazione fra due atomi viene a volte rappresentata dalla legge di Lennard-Jones, che dice che l'energia potenziale  $V$  (espressa in opportune unità di misura) dell'interazione dipende dalla distanza  $r$  (espressa in  $\mu\text{m}$ ) fra i due atomi secondo la legge

$$V(r) = a \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right),$$

dove  $a$  ed  $r_0$  sono numeri positivi da scegliere caso per caso.

- (1) Studia la funzione  $V$  (anche per distanze negative), nel caso  $a = 10$  e  $r_0 = 1$ .
- (2) Dimostra che, quali che siano  $a$ ,  $r_0 > 0$ , la funzione  $V$  (ristretta alla semiretta delle distanze positive) ha un unico punto di minimo  $r_{\min} > 0$ , e determina l'espressione di  $r_{\min}$  in funzione di  $a$  e  $r_0$ .
- (3) Determina  $a$  e  $r_0$  in modo che il potenziale minimo valga  $V(r_{\min}) = -1$  e sia ottenuto per  $r_{\min} = 2 \mu\text{m}$ .
- (4) Esistono dei valori positivi di  $a$  e  $r_0$  per cui l'energia potenziale  $V$  sia sempre positiva?