Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Secondo scritto A.A. 2015/16 — 11 luglio 2016

Nome e Cognome:

---

1) Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M.

(i) Sia $p_0 \in M$ tale che $X(p_0) \neq O$. Dimostra che esiste una carta locale (U, φ) centrata in p_0 tale che per ogni $p \in U$ la curva $\sigma_p(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(p) + te_1\big)$ è (il pezzo contenuto in U del)la curva integrale di X uscente da p.

(ii) Sia $\sigma\colon (a, +\infty) \to M$ una curva integrale massimale di X tale che $\sigma(t) \to p_0 \in M$ per $t \to +\infty$. Dimostra che $X(p_0) = O$.

2) Dato $k \in \mathbb{N}$, sia

$$M_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=0}^{k} \overline{B(je_1, 1/4)} ,$$

dove $\overline{B(x,r)}$ è la palla euclidea chiusa di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$. Calcola la coomologia di de Rham di M_k.

3) Trova una connessione ∇ su $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tale che per ogni $(x_0, y_0) \in M$ la curva

$$\sigma(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t)$$

sia una ∇-geodetica. [*Suggerimento:* può essere utile identificare M con $\mathbb{C} \setminus \{O\}$ e considerare il campo radiale $R(p) = p/\|p\|^2$.]