Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Sesto scritto A.A. 2013/14 — 29 gennaio 2015

Nome e Cognome:

---

1) Siano M, N varietà orientabili, sia $f\colon M \to N$ un'applicazione liscia, e sia $q \in N$ un valore regolare per f. Dimostra che $f^{-1}(q)$ è una sottovarietà orientabile di M.

2) Sia M una n-varietà compatta, connessa e orientata. Per $0 \le k \le n$ sia $I^k\colon A^k(M) \to A^{n-k}(M)^*$, dove $A^{n-k}(M)^*$ è lo spazio duale di $A^{n-k}(M)$, l'applicazione data da $I^k(\eta)(\omega) = \int_M \eta\wedge\omega$ per ogni $\eta \in A^k(M)$ e $\omega \in A^{n-k}(M)$.

(i) Dimostra che I^k induce un'applicazione lineare, che continueremo a indicare con I^k, da $H^k(M)$ a $H^{n-k}(M)^*$.

La *dualità di Poincaré*, che puoi dare per nota, asserisce che I^k è un isomorfismo per ogni $k = 0, \ldots, n$.

(ii) Sia $\alpha \in A^k(M)$ una forma qualsiasi. Dimostra che $\int_M \alpha \wedge \beta = 0$ per ogni $\beta \in A^{n-k}(M)$ se e solo se $\alpha \equiv O$.

(iii) Dimostra che una forma $\eta \in A^k(M)$ è esatta se e solo se $\int_M \eta \wedge \omega = 0$ per ogni $(n-k)$-forma chiusa $\omega \in Z^{n-k}(M)$. [*Suggerimento:* dimostra prima che η è necessariamente chiusa.]

(iv) Sia $\eta \in Z^1(M)$ una 1-forma chiusa. Supponiamo che esista una famiglia $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di aperti connessi non vuoti tali che $U_j \subset U_{j+1}$ e $\eta|_{U_j}$ è esatta per ogni $j \in \mathbb{N}$. Dimostra che $\eta|_U$ è esatta, dove $U = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$.

3) In questo esercizio identificheremo sistematicamente $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ con lo spazio delle applicazioni C^∞ da $\mathbb{R}^n$ in sé tramite l'identificazione canonica tra $T_p\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$. Sia $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$, e $\|\cdot\|$ la norma ad esso associata. Fissa infine un campo $Y \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\langle Y(p), p\rangle = 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, e sia $Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ il campo dato da $Z(p) = p + Y(p)$.

(i) Dimostra che $Y(O) = O$.

(ii) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva integrale di Z. Scrivi un'equazione differenziale ordinaria del prim'ordine che sia verificata dalla funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ data da $f(t) = \|\sigma(t)\|^2$, e deducine che se $\sup I < +\infty$ allora $\sigma(I)$ è limitato.

(iii) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva integrale massimale di Z. Dimostra che $I = \mathbb{R}$ e che $\lim_{t\to-\infty} \sigma(t) = O$.

(iv) Sia ora $W \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ definito da $W(p) = Y(p) + \|p\|^2 p$, e sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva integrale massimale di W tale che $\gamma(0) \ne O$. Scrivi un'equazione differenziale ordinaria del prim'ordine che sia verificata dalla funzione $g\colon I \to \mathbb{R}$ data da $g(t) = \|\gamma(t)\|^2$, e deducine che $I = (-\infty, t_0)$ con $t_0 < +\infty$.