Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Primo scritto A.A. 2013/14 — 13 giugno 2014

Nome e Cognome:

---

1) Sia
$$S = \left\{(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2-(x^5)^2 = 3\right\}$$
e sia $f\colon S \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x^1,\ldots,x^5) = x^1+x^2+x^3$.

(i) Dimostra che S è una sottovarietà di $\mathbb{R}^5$, e per ogni punto $p = (p^1,\ldots,p^5) \in S$ scrivi un'equazione cartesiana dello spazio tangente T_pS, pensato come sottospazio vettoriale di $T_p\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^5$.

(ii) Dimostra che la funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$ ha esattamente 2 punti critici.

(iii) Dimostra che l'insieme $f^{-1}(0)$ è una sottovarietà non compatta di S.

2) Sia M una varietà m-dimensionale compatta orientabile.

(i) Siano f_0, $f_1\colon M \to N$ due applicazioni differenziabili, dove N è una n-varietà con $n \ge m$, e sia $\omega \in A^m(N)$ una m-forma chiusa. Dimostra che se esiste una omotopia liscia $H\colon [0,1]\times M \to N$ fra f_0 e f_1 allora
$$\int_M f_0^*\omega = \int_M f_1^*\omega\ .$$

(ii) Sia N una n-varietà compatta orientabile. Dimostra che per ogni $V \subseteq N$ aperto esiste una n-forma $\omega \in A^n(N)$ con supporto contenuto in V tale che $\int_N \omega \ne 0$.

(iii) Sia $f\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile fra n-varietà compatte orientabili. Supponi che esista un aperto $U \subseteq M$ tale che $f|_U\colon U \to V = f(U)$ sia un diffeomorfismo che conserva l'orientazione e tale che $f^{-1}\big(f(U)\big) = U$. Dimostra che se $\omega \in A^n(N)$ ha supporto contenuto in V allora
$$\int_M f^*\omega = \int_N \omega\ .$$
Deducine che f non può essere omotopa (tramite un'omotopia liscia) a un'applicazione costante.

3) Sia (M,g) una varietà Riemanniana. Per ogni $p \in M$ e ogni $v \in T_pM$ indichiamo con $v^\flat$ l'elemento di T_p^*M dato da $v^\flat = g_p(\cdot,v)$.

(i) Dimostra che l'applicazione ${}^\flat\colon TM \to T^*M$ così definita è un isomorfismo di fibrati vettoriali. Indicheremo con ${}^\sharp\colon T^*M \to TM$ l'applicazione inversa.

(ii) Dimostra che l'applicazione $g^*\colon A^1(M)\times A^1(M) \to C^\infty(M)$ data da $g^*(\omega,\eta)(p) = g_p(\eta_p^\sharp,\omega_p^\sharp)$ definisce un tensore $g^* \in \mathcal{T}^2_0(M)$ simmetrico definito positivo.

(iii) Sia $J\colon TM\oplus T^*M \to TM \oplus T^*M$ data da
$$J_p(v,\omega) = (\omega^\sharp, -v^\flat)$$
per ogni $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\omega \in T_p^*M$. Dimostra che $J^2 = -\,\mathrm{id}$.

(iv) Sia $\hat g = g \oplus g^*$ la metrica lungo le fibre di $TM \oplus T^*M$ data da
$$\hat g_p\big((v_1,\omega_1),(v_2,\omega_2)\big) = g(v_1,v_2) + g^*(\omega_1,\omega_2)$$
per ogni $p \in M$, v_1, $v_2 \in T_pM$ e ω_1, $\omega_2 \in T_p^*M$. Dimostra che l'operatore J è un'isometria antisimmetrica per $\hat g$, cioè che
$$\hat g_p\big((v_1,\omega_1), J(v_2,\omega_2)\big) = \hat g_p\big(-J(v_1,\omega_1),(v_2,\omega_2)\big) \quad \text{e} \quad \hat g_p\big(J(v_1,\omega_1),J(v_2,\omega_2)\big) = \hat g_p\big((v_1,\omega_1),(v_2,\omega_2)\big)\ .$$

(v) Sia ∇ la connessione di Levi-Civita su M, e sia $\nabla^*\colon \mathcal{T}(M)\times A^1(M) \to A^1(M)$ data da $\nabla^*_X\omega = (\nabla_X\omega^\sharp)^\flat$. Dimostra che ∇^* è una connessione su T^*M tale che
$$X\big(g^*(\omega_1,\omega_2)\big) = g^*\big(\nabla^*_X\omega_1,\omega_2\big) + g^*\big(\omega_1,\nabla^*_X\omega_2\big)$$
per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$ e ogni ω_1, $\omega_2 \in A^1(M)$.

(vi) Costruisci una connessione $\hat\nabla$ su $TM \oplus T^*M$ tale che $J\circ\hat\nabla_X = \hat\nabla_X \circ J$ per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$.