Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Sesto scritto A.A. 2011/12 — 18 settembre 2012

Nome e Cognome:

---

1) Siano M, N varietà differenziabili senza bordo della stessa dimensione, e sia $f\colon M \to N$ un embedding.

(i) Supponi che M sia compatta e che N sia connessa. Mostra che f è un diffeomorfismo.

(ii) Sia S^k la sfera k-dimensionale, munita dell'usuale struttura differenziabile. Per ogni coppia di interi positivi (m, n), calcola il minimo intero h tale che esista un embedding $f\colon S^n \times S^m \to \mathbb{R}^h$. [*Suggerimento:* può essere utile dimostrare preliminarmente che esiste un embedding di $S^n \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.]

2) Sia $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ la 3-forma differenziale così definita:

$$\omega = \frac{x^1\, dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - x^2\, dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + x^3\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 - x^4\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3}{\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\big)^2}$$

e, per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia

$$\Sigma_a = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4 - a)^2 = 1\} \ .$$

(i) Mostra che, per ogni $a \notin \{1, -1\}$, l'insieme Σ_a è un'ipersuperficie compatta e orientabile di $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, e fissane un'orientazione.

(ii) Mostra che ω è una forma chiusa.

(iii) Sia $S_r \subseteq \mathbb{R}^4$ la sfera di raggio r centrata nell'origine (per cui S_r è un'ipersuperficie di $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$), e fissa un'orientazione su S_r. Calcola

$$\int_{S_r} \omega \ ,$$

assumendo il fatto che il volume della sfera unitaria 3-dimensionale è uguale a $2\pi^2$.

(iv) Per ogni $a \notin \{1, -1\}$, calcola

$$\int_{\Sigma_a} \omega \ .$$

3) Sia $\sigma\colon I \to M$ una geodetica non costante in una varietà Riemanniana M. Se $f\colon J \to I$ è un diffeomorfismo fra intervalli di $\mathbb{R}$, dimostra che $\sigma \circ f$ è una geodetica se e solo se f è una funzione lineare affine.