Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quinto scritto A.A. 2010/11 — 18 luglio 2011

Nome e Cognome:

---

1) Sia $S(n,\mathbb{R}) \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici simmetriche a coefficienti reali, e $F\colon M_{n,n}(\mathbb{R}) \to S(n,\mathbb{R})$ data da $F(X) = X^T X$. Dimostra che

$$dF_X(A) = X^T A + A^T X$$

per ogni A, $X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Indicato con $O(n) = \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X^T X = I_n\}$ il gruppo ortogonale, deduci che per ogni $X \in O(n)$ il differenziale $dF_X\colon M_{n,n}(\mathbb{R}) \to S(n,\mathbb{R})$ è surgettivo, e quindi che $O(n)$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n(n-1)/2$. Infine, identifica lo spazio tangente $T_{I_n}O(n)$ visto come sottospazio vettoriale di $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

2) Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M di flusso $\Theta(t,p) = \theta_t(p)$.

(i) Se $\tau \in A^k(M)$ è una k-forma su M, dimostra che ponendo

$$(\mathcal{L}_X\tau)_p = \left.\frac{d}{dt}(\theta_t^*\tau)_p\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\theta_t^*(\tau_{\theta_t(p)}) - \tau_p}{t}\ ,$$

si definisce una k-forma $\mathcal{L}_X\tau \in A^k(M)$, detta *derivata di Lie* di τ lungo X.

(ii) Dimostra che

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\eta)$$

per ogni ω, $\eta \in A^\bullet(M)$.

3) Sia G un gruppo di Lie di dimensione n, e indichiamo con L_g, $R_g\colon G \to G$ le traslazioni sinistre (rispettivamente, destre) su G.

(i) Diremo che una k-forma $\omega \in A^k(G)$ è *invariante a sinistra* se $L_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$. Dimostra che per ogni $0 \le k \le n$ esiste almeno una k-forma su G invariante a sinistra mai nulla, e deduci in particolare che G è orientabile.

(ii) Diremo che una metrica Riemanniana $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ su G è *invariante a sinistra* se

$$\langle dL_g(v), dL_g(w)\rangle_{gh} = \langle v, w\rangle_h$$

per ogni $h \in G$ e ogni v, $w \in T_hG$; è *invariante a destra* se vale una formula analoga rispetto alle traslazioni destre; e che è *biinvariante* se è invariante sia a sinistra che a destra. Dimostra che una metrica Riemanniana invariante a sinistra su G esiste sempre.

(iii) Supponi G compatto, e siano ν una forma di volume invariante a sinistra, e $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ una metrica Riemanniana invariante a sinistra. Dimostra che ponendo

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle_g = \int_G \langle (dR_x)_g v, (dR_x)_g w\rangle_{gx}\, \nu\ ,$$

dove $g \in G$ e v, $w \in T_gG$, si ottiene una metrica Riemanniana biinvariante su G.