Geometria e Topologia Differenziale

Quinto scritto — 11 settembre 2007

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione sul piano orizzontale, $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$, e sia $\sigma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco, la cui proiezione sul piano orizzontale sia data da

$$\pi \circ \sigma(t) = \left(\frac{t}{2} \cos\left(\log \frac{t}{2} \right), \frac{t}{2} \sin\left(\log \frac{t}{2} \right), 0 \right),$$

e tale che $\sigma(2) = (1, 0, \sqrt{2})$.

(i) Determina esplicitamente σ.

(ii) Mostra che σ è una curva biregolare, e calcolane curvatura e torsione.

2) Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z - zy = 0\} ,$$

e sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (2t^3 + t^2 + 1, 2t, t^2 + 1)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, e determina una parametrizzazione globale h di S.

(ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione h.

(iii) Determina le linee di curvatura di S passanti per $(1, -1, 1)$.

(iv) Osserva che il supporto di γ è contenuto in S, e calcola il modulo della curvatura geodetica e della curvatura normale di γ (considerata come curva su S) per $t = 0$.

3) Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$, e considera il campo vettoriale $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definito:

$$X(x, y, z) = (y^2 + z^2 - xy, x^2 + z^2 - xy, -z(x + y)).$$

Sia inoltre $v\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ la restrizione di X a Σ.

(i) Mostra che v è un campo vettoriale su Σ.

(ii) Determina i punti singolari di v, e calcolane l'indice.