Geometria e Topologia Differenziale

Quarto scritto dell'A.A. 2003-04 — 11 gennaio 2005

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, di curvatura κ, torsione τ e riferimento di Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. La curva $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(s) = \sigma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$$

è detta curva dei *centri di curvatura* di σ.

(i) Dimostra che la curva γ è regolare se e solo se $\tau^2 + (\dot{\kappa})^2$ non si annulla mai.
(ii) Dimostra che se σ è un'elica circolare allora γ è anch'essa un'elica circolare, e che la curva dei centri di curvatura di γ è σ stessa.

2) Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione $f(u,v) = (u, uv, v^2)$, e siano $U \subset \mathbb{R}^2$ e $S \subset \mathbb{R}^3$ dati da

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \neq 0\} \quad \text{e} \quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid zx^2 - y^2 = 0\}.$$

(i) Dimostra che $f(\mathbb{R}^2) \subseteq S$.
(ii) Studia l'iniettività di f, e determina in quali punti il differenziale di f è iniettivo.
(iii) Posto $S_0 = f(U)$, dimostra che S_0 è una superficie regolare, e che $f\colon U \to S_0$ è un diffeomorfismo.
(iv) Trova una base dello spazio tangente a S_0 in $p_0 = (1,1,1)$.
(v) *Facoltativo:* S è una superficie regolare?

3) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, di curvatura κ, torsione τ e riferimento di Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Sia poi $\varphi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(s,t) = \sigma(s) + t\,\mathbf{t}(s)$, in modo che l'immagine di φ sia l'unione delle rette tangenti a σ.

(i) Trova il più grande aperto $U \subset I \times \mathbb{R}$ tale che $\varphi|_U\colon U \to \mathbb{R}^3$ sia una superficie immersa.
(ii) Dato $(s_0, t_0) \in U$, dimostra che esiste un intorno aperto $A \subset U$ di (s_0, t_0) tale che $S = \varphi(A)$ è una superficie regolare, e calcola la curvatura Gaussiana di S in ogni suo punto.
(iii) Dato $p \in S$, trova una geodetica di S passante per p.
(iv) *Facoltativo:* Dimostra che S è localmente isometrica a un piano.