Geometria e Topologia Differenziale

Terzo scritto — 29 giugno 2006

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare con sostegno contenuto in una sfera di raggio $R > 0$, e sia $\kappa: I \to \mathbb{R}$ la curvatura di σ. Mostra che

$$\kappa(t) \geq \frac{1}{R}$$

per ogni $t \in I$.

2) (*Teorema di Joachimsthal*) Siano S_1 ed S_2 due superfici orientabili che si intersecano in una curva σ, e indichiamo con $N_j: S_j \to S^2$ la mappa di Gauss di S_j.

(i) Dimostra che se σ è una linea di curvatura sia per S_1 che per S_2 allora l'angolo fra N_1 ed N_2 è costante lungo σ.

(ii) Viceversa, dimostra che se l'angolo fra N_1 ed N_2 è costante lungo σ e σ è una linea di curvatura per S_1 allora σ è una linea di curvatura anche per S_2.

3) Sia S la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse y la curva di equazione $y = \cosh(z)$ contenuta nel piano $x = 0$.

(i) Calcola la curvatura gaussiana e la curvatura media di S in ogni suo punto.

(ii) Posto

$$R = \left\{ (x, y, z) \in S \;\middle|\; x \geq 0, \frac{5}{4} \leq y \leq \frac{5}{3} \right\},$$

calcola l'integrale su R della curvatura gaussiana di S.