Geometria e Topologia Differenziale

Primo scritto — 24 gennaio 2008

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(i) Mostra che esiste una curva $\omega\colon I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ di classe C^∞ tale che per ogni $s \in I$ si abbia:

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{t}(s),\ \dot{\mathbf{n}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{n}(s),\ \dot{\mathbf{b}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{b}(s).$$

(ii) Mostra che ω è costante se e solo se γ è un'elica circolare retta (ricorda che le eliche circolari rette sono tutte e sole le curve biregolari con curvatura e torsione costanti).

(iii) Sia $v\colon I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una curva di classe C^∞. Mostra che la direzione di v è costante se e solo se $v'(t) \wedge v(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

(iv) Mostra che la direzione di ω è costante se e solo se γ è un'elica generalizzata (ricorda che le eliche generalizzate sono tutte e sole le curve biregolari con rapporto costante tra torsione e curvatura).

2) Siano $\sigma, \tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ le traiettorie, parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, di due punti che si muovono soggetti alle seguenti condizioni:

(a) σ parte da $\sigma(0) = (0,0,0)$ e si muove lungo l'asse x nel verso positivo;

(b) τ parte da $\tau(0) = (0,1,0)$ e si muove parallelamente all'asse z nel verso positivo.

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'unione, al variare di $t \in \mathbb{R}$, delle rette passanti per $\sigma(t)$ e per $\tau(t)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, e danne una parametrizzazione globale.

(ii) Calcola i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione trovata.

(iii) Calcola la curvatura di Gauss di S, dimostra che essa è ovunque non positiva, e ammette un unico punto di minimo assoluto.

(iv) Detto P il punto di minimo assoluto trovato in (iii), calcola le direzioni principali e le curvature principali di S in P.

3) Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da:

$$\varphi(u,v) = (2\cos u, \sin u, 2v).$$

(i) Trova il più grande $c > 0$ tale che la restrizione di φ a $(-c,c) \times \mathbb{R}$ sia una parametrizzazione globale di una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Mostra che se $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ è una geodetica in Σ, allora $v(t) = at + b$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$.