Geometria e Topologia Differenziale

Terzo compitino A.A. 2006/07

Nome e Cognome:

---

1) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, e $\sigma\colon I \to S$ una curva in S parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(i) Mostra che, se σ è biregolare, piana ed è una geodetica di S, allora è una linea di curvatura di S.
(ii) Costruisci un esempio in cui σ sia una geodetica piana di S, ma non sia una linea di curvatura di S.
(iii) Costruisci un esempio in cui σ sia una linea di curvatura di S e sia piana, ma non sia una geodetica di S.
(iv) Dimostra che, se tutte le geodetiche di S sono piane, allora S è contenuta in un piano o in una sfera.

2) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(t) = (\alpha(t), 0, \beta(t))$ con $\alpha(t) > 0$ per ogni $t \in I$, e supponi che σ sia una parametrizzazione iniettiva di un arco aperto di Jordan del piano $\{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Sia S la superficie ottenuta ruotando il sostegno di σ intorno all'asse z, e sia infine $\varphi\colon \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ la superficie immersa con sostegno S data da $\varphi(\theta, t) = (\alpha(t)\cos\theta, \alpha(t)\sin\theta, \beta(t))$.

(i) Per ogni $t_0 \in I$ calcola la curvatura geodetica del parallelo $\gamma_{t_0}\colon \mathbb{R} \to S$ dato da $\gamma_{t_0}(u) = \varphi(u, t_0)$, e verifica che è costante.

Sia ora $S = S^2 \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$, dove S^2 è la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$, siano $a, b \in (-1, 1)$ con $a < b$, e poniamo $R = \{(x, y, z) \in S \mid a < z < b\}$.

(ii) Calcola la curvatura geodetica dei paralleli il cui sostegno è dato da $S \cap \{z = a\}$ e $S \cap \{z = b\}$.
(iii) Sfruttando il teorema di Gauss-Bonnet, calcola l'area di R.

3) Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $p \in S$ un punto singolare di X.

(i) Dimostra che dX_p definisce un endomorfismo di T_pS.
(ii) Se $\det dX_p \neq 0$ (e in tal caso diremo che p è un punto singolare *non degenere* di X), dimostra che p è un punto singolare isolato, e che l'indice di X in p è uguale al segno del determinante di dX_p.
(iii) Dato $a \in S^2$, sia $X_a\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ dato da $X_a(p) = a - \langle a, p\rangle p$. Dimostra che $X_a \in \mathcal{T}(S^2)$, trovane i punti singolari e calcola gli indici.
(iv) Trova un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(S^2)$ con un solo punto singolare.

4) Sia $f \in C^\infty(S)$, dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie.

(i) Dimostra che esiste un unico campo vettoriale $\nabla f \in \mathcal{T}(S)$, detto *gradiente* di f, tale che
$$\langle \nabla f(p), v\rangle_p = df_p(v)$$
per ogni $p \in S$ e ogni $v \in T_pS$.
(ii) Dimostra che $p \in S$ è un punto singolare per ∇f se e solo se è un punto critico di f.
(iii) Sia $p \in S$ un punto critico di f. Dimostra che ponendo per ogni $v \in T_pS$
$$\mathrm{Hess}_p f(v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \sigma)\Big|_{t=0},$$
dove $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ è una qualsiasi curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, otteniamo una forma quadratica ben definita su T_pS, detta *Hessiano* di f in p.
(iv) Sia $p \in S$ un punto singolare di ∇f. Dimostra che p è non degenere se e solo se $\mathrm{Hess}_p f$ è una forma quadratica non degenere.
(v) Sia $p \in S$ un punto singolare non degenere di ∇f. Dimostra che $\mathrm{ind}_p(\nabla f) = +1$ se e solo se $\mathrm{Hess}_p f$ è definita positiva o negativa se e solo se p è un punto di massimo o minimo locale per f; e che $\mathrm{ind}_p(\nabla f) = -1$ se e solo se $\mathrm{Hess}_p f$ è indefinita se e solo se p è un punto di sella per f. (*Continua sul retro del foglio...*)

(vi) Supponiamo che ∇f abbia solo punti singolari non degeneri, e che S sia compatta orientabile. Indichiamo con $m(f)$ il numero di massimi o minimi locali di f, e con $s(f)$ il numero di punti di sella di f. Dimostra che $m(f) - s(f) = \chi(S)$.

(vii) Sia S compatta orientata da una mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$, e sia $a \in S^2$ un valore regolare sia per N che per $-N$. Dimostra che $I_a = N^{-1}(\{a, -a\})$ è un insieme finito, e che il numero di punti ellittici in I_a meno il numero di punti iperbolici in I_a è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di S. (*Suggerimento:* considera la funzione $h_a \in C^\infty(S)$ data da $h_a(p) = \langle p, a \rangle$.)