MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B

COMPITINO 2 FILA B — SOLUZIONI

PROF. MARCO ABATE

9 febbraio 2007

1. Parte I

Esercizio 1.1. *La media di tre numeri reali può essere minore del minimo dei tre numeri? Se sì fai un esempio, se no perché?*

Siano $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Sia $m = \min\{x_1, x_2, x_3\}$. Possiamo riscrivere i tre numeri come $m, m+a, m+b$, con $a, b \geq 0$, dato che m è il minimo dei tre numeri. Allora la media $\overline{x}$ dei tre numeri è:

$$\overline{x} \;=\; \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i \;=\; \frac{m + (m+a) + (m+b)}{3} \;=\; m + \frac{a+b}{3} \;\geq\; m,$$

ovvero la media di tre numeri reali è sempre maggiore o uguale al minimo dei tre numeri.

Esercizio 1.2. *Perché non si può calcolare il logaritmo di un numero negativo?*

Sia $b < 0$. Calcolare $\log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, vuol dire trovare quel numero reale x tale che $a^x = b$ (il logaritmo è per definizione la funzione inversa dell'esponenziale). Ma un numero positivo (a) elevato ad un qualsiasi esponente (x) rimane positivo. Pertanto

$$0 \;<\; a^x \;=\; b \;<0,$$

cioè $0 < 0$, assurdo. Pertanto non si può calcolare il logaritmo di un numero negativo.

Esercizio 1.3. *Per i punti* $(0,0)$, $(2,1)$ *e* $(7,3)$ *passa una retta? Se sì, quale?*

Per due punti passa una e una sola retta. Trovata la retta che passa per $(0,0)$ e $(2,1)$ o questa passa anche per $(7,3)$ (e allora per i tre punti passa una retta) oppure no (e allora nessuna retta passa per tutti e tre i punti).

La retta che passa per $(0,0)$ e $(2,1)$ è la retta $y = mx + d$ che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + d \\ 1 = m \cdot 2 + d \end{cases}$$

ovvero la retta $y = \frac{1}{2}x$. $y(7) = \frac{7}{2} \neq 3$, ovvero la retta non passa anche per $(7,3)$. Nessuna retta passa per tutti e tre i punti.

2. Parte II

Esercizio 2.1. *Effettui un esperimento in cui misuri l'altezza di un oggetto lanciato in aria in funzione del tempo e ottieni le seguenti coppie di dati* $(10,10)$, $(20,15)$, $(30,5)$ *(la coppia* $(20,15)$ *indica che dopo* 20 *secondi l'oggetto è ad altezza* 15 *metri). Dalle tue ipotesi sull'esperimento, supponi che la funzione che lega le due quantità sia quadratica.*

(1) *Dai l'espressione esplicita della funzione quadratica che passa per i dati.*
(2) *Per che intervallo di valori tale funzione può effettivamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?*

(1) Abbiamo supposto che la funzione che lega tempo (t) e altezza (h) sia quadratica, ovvero della forma $h = at^2+bt+c$. Imponiamo le condizioni di passaggio per i tre dati e applichiamo il metodo delle differenze:

$$\begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 15 = 400a + 20b + c \\ 5 = 900a + 30b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 5 = 300a + 10b \\ -10 = 500a + 10b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 5 = 300a + 10b \\ -15 = 200a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 5 = 300a + 10b \\ a = -\frac{3}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ b = \frac{11}{4} \\ a = -\frac{3}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -10 \\ b = \frac{11}{4} \\ a = -\frac{3}{40} \end{cases}$$

Quindi la funzione cercata è

$$h = -\frac{3}{40}t^2 + \frac{11}{4}t - 10.$$

(2) Non abbiamo molti dati sull'esperimento[1]. Quello che è sicuro è che l'oggetto lanciato in aria non potrà diminuire arbitrariamente la sua altezza, in quanto limitato (dal pavimento). Supponendo che il pavimento sia ad altezza $h_0 = 0$, allora la funzione trovata ha senso quando è positiva:

$$h = -\frac{3}{40}t^2 + \frac{11}{4}t - 10 \geq 0.$$

Ovvero l'intervallo in cui essa descrive l'esperimento è (t approssimato al centesimo di secondo) $t \in [4.09; 32.57]$.

Esercizio 2.2. *Scrivi l'espressione esplicita di una funzione* $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*, continua e monotona decrescente, tale che* $f(0) = 3$ *e* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Ovviamente funzioni con questo comportamento ce ne sono tante. Ci limitiamo a costruirne una[2]. Come prima cosa cerchiamo una funzione che abbia un limite finito a $+\infty$. La funzione

$$f_0(x) = a^x, \quad 0 < a < 1,$$

fa al caso nostro. Questa funzione è monotona decrescente, come richiesto. Curiamoci ora dell'*ampiezza* della funzione, ovvero di quanto aumenta quando x va da 0 all'infinito. $f_0(x)$ passa da un valore 1 a 0 (ovvero ha ampiezza -1), la funzione cercata ha ampiezza -2. Moltiplichiamo pertanto f_0 per 2:

$$f_1(x) = 2a^x, \quad 0 < a < 1.$$

Ora interessiamoci al fatto che passi per il punto $(0, 3)$. $f_2(0) = 2$, pertanto dobbiamo aggiungere 1:

$$f_2(x) = 1 + 2a^x, \quad 0 < a < 1.$$

f_2 è continua, monotona decrescente, $f_2(0) = 3$ e $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 1$. Resta soltanto da restringere f_2 al dominio richiesto, ovvero $x \geq 0$:

$$f(x) = f_2|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x).$$

[1]Pertanto quella che segue non è *la soluzione* dell'esercizio, ma una possibile soluzione

[2]Curiosità: l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, continua e monotona decrescente, tale che $f(0) = 3$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ non si può esprimere meglio di quanto non sia già espresso da questo testo... Non si può certamente pretendere di elencare in qualche modo tutte le funzioni che vi appartengono...

Esercizio 2.3. *Fai alcuni esperimenti, calcolando due quantità (x e y). I risultati delle misurazioni, ed altri ottenuti da questi tramite semplici operazioni da questi, sono dati.*

(1) *Supponi che y dipenda linearmente da x. Qual è la retta di regressione? L'approssimazione è buona?*
(2) *Se invece supponi che y abbia un comportamento esponenziale in x (cioè si comporti come e^x), qual è la migliore approssimazione che puoi dare? L'approssimazione è buona?*

(1) Gli unici dati necessari sono i seguenti valori medi: $\overline{x} = 5.2$, $\overline{y} = 6.2$, $\overline{x^2} = 173.6$, $\overline{y^2} = 47.2$ e $\overline{xy} = 90.3$. La retta di regressione $y = \overline{m}x + \overline{d}$ è data da

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{90.3 - 11.6 \cdot 6.2}{173.6 - (11.6)^2} = 0.47 \\ \overline{d} &= \overline{y} - \overline{m} \cdot \overline{x} \approx 6.2 - 0.47 \cdot 11.6 \approx 0.74. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di regressione è $y = 0.47x + 0.74$. La bontà dell'approssimazione è data dal coefficiente di Paerson:

$$CP = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{y^2} - \overline{y}^2)}} \approx \frac{90.3 - 11.6 \cdot 6.2}{\sqrt{(173.6 - (11.6)^2)(47.2 - (6.2)^2)}} \approx 0.994,$$

quindi l'approssimazione è buona (il coefficiente di Paerson è vicino a 1).

(2) Vogliamo trovare una relazione del tipo $y = Ae^{cx}$. Prendendo il logaritmo di tale relazione, otteniamo

$$\log y = \log A + cx,$$

ovvero una dipendenza lineare fra x e $\log y$. Pertanto sono necessari i seguenti valori medi: $\overline{x} = 11.6$, $\overline{\log y} = 1.69$, $\overline{x^2} = 173.6$, $\overline{(\log y)^2} = 3.15$ e $\overline{x \log y} = 22.86$. La retta di regressione è data da:

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \frac{\overline{x \log y} - \overline{x} \cdot \overline{\log y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{22.86 - 11.6 \cdot 1.69}{173.6 - (11.6)^2} \approx 0.08 \\ \overline{\log A} &= \overline{\log y} - \overline{c} \cdot \overline{x} \approx 1.69 - 0.08 \cdot 11.6 \approx 0.72. \end{aligned}$$

Pertanto la funzione esponenziale ottimale è

$$y \approx e^{0.08x+0.72} \approx 2.06 \cdot e^{0.08x} \approx 2.06 \cdot (1.09)^x.$$

La bontà dell'approssimazione è data dal coefficiente di Paerson:

$$CP = \frac{\overline{x \log y} - \overline{x} \cdot \overline{\log y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{\log y^2} - \overline{\log y}^2)}} \approx \frac{22.86 - 11.6 \cdot 1.69}{\sqrt{(173.6 - (11.6)^2)(3.15 - (1.69)^2)}} \approx 0.961,$$

che è una buona approssimazione (il coefficiente è vicino a uno), ma peggiore dell'approssimazione lineare.