11. Esercitazioni del 6 marzo 2007

11.1. **Polinomio di Taylor.** Consideriamo una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, dove U è un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, continua e derivabile $n+1$ volte con tutte le derivate continue. Il polinomio di Taylor di grado n di f in x_0, ovvero il polinomio di grado n che meglio approssima f vicino a x_0 è:

$$P_{f,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{36}$$

dove $f^{(k)}$ è f se $k=0$, la derivata k-esima di f altrimenti.

L'affermazione "$P_{f,n}$ è il polinomio di grado n che meglio approssima f vicino a x_0" va intesa nel senso seguente:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,n}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{E_{f,n}(x)}{(x-x_0)^n} = 0, \tag{37}$$

ovvero l'errore $E_{f,n}(x)$ commesso approssimando $f(x)$ con $P_{f,n}(x)$ è un o piccolo di $(x-x_0)^n$.

Per essere più precisi, si ha una stima molto precisa sull'errore, data da

$$|E_{f,n}(x)| \le \max_{c\in[x_0,x]} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{38}$$

ovvero l'errore commesso è un O grande di $(x-x_0)^{n+1}$ (secondo la definizione (c)).

Attenzione! Migliore approssimazione vicino a x_0 significa solo quanto appena chiarito, e niente di più... Per capire cosa intendiamo, guarda con attenzione gli esempi successivi.

11.2. **Calcoli approssimati.** Usando i polinomi di Taylor, si possono calcolare approssimazioni di varie costanti, come ad esempio e, $\log 2$, π. Vediamo come.

Esempio 11.1. Considerando i polinomi di Taylor per $f(x) = e^x$ in zero, possiamo cercare di calcolare un valore approssimato per $e = e^1$. La derivata k-esima di $f(x)$ è

$$f^{(k)}(x) = e^x,$$

pertanto, utilizzando (36),

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Per $x=1$,

$$e = e^1 \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}. \tag{39}$$

L'errore compiuto in questa approssimazione è dato da (38)

$$|E_{f,n}(x)| \le \max_{c\in[0,1]} \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = \max_{c\in[0,1]} \frac{e^c}{(n+1)!} = \frac{e}{(n+1)!} \le \frac{3}{(n+1)!},$$

pertanto abbiamo le approssimazioni di e elencate in Tabella 9. Come evidente, le approssimazioni successive convergono molto rapidamente al valore di e.

Esempio 11.2. Procediamo analogamente per calcolare $\log 2$, calcolando i polinomi di Taylor di $\log x$ in $x_0 = 1$. La derivata k-esima $(k \neq 0)$ di $f(x) = \log x$ è

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k},$$

n	$P_{f,n}(1)$	stima di $E_{f,n}(1)$	stima di e
1	2	1.5	$0.50000 < e < 3.50000$
2	2.5	0.5	$2.00000 < e < 3.00000$
3	2.66667	0.125	$2.54166 < e < 2.79167$
5	2.71667	0.00417	$2.71250 < e < 2.72084$
8	2.71828	$8 \cdot 10^{-6}$	$2.71827 < e < 1.71828$

Tabella 9. Approssimazioni di e

pertanto, utilizzando (36),

$$\log x \approx \log 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{1^k}}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(x-1)^k. \tag{40}$$

Per $x = 2$,

$$\log 2 \approx \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(2-1)^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k},$$

ovvero la somma a segni alterni degli inversi dei primi n interi. L'errore compiuto in questa approssimazione è dato da (38)

$$|E_{f,n}(x)| \le \max_{c\in[1,2]} \frac{\frac{n!}{c^{n+1}}}{(n+1)!}(2-1)^{n+1} = \max_{c\in[1,2]} \frac{1}{c^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{n+1},$$

errori molto maggiori di quelli compiuti prima con il calcolo di e. Le approssimazioni sono riassunte in Tabella 10. In questo caso calcolare $\log 2$ utilizzando i polinomi

n	$P_{f,n}(2)$	stima di $E_{f,n}(2)$	stima di $\log 2$
1	1	0.5	$0.50000 < \log 2 < 1.00000$
2	0.5	0.33334	$0.16666 < \log 2 < 0.83334$
5	0.78333	0.16667	$0.61666 < \log 2 < 0.95000$
10	0.64563	0.09091	$0.55472 < \log 2 < 0.736544$
50	0.68325	0.01961	$0.66363 < \log 2 < 0.70286$
100	0.68817	0.00991	$0.67827 < \log 2 < 0.69808$

Tabella 10. Approssimazioni di $\log 2$

di Taylor è molto più complicato che calcolare e.

Esempio 11.3. Ma le cose possono andare ancora peggio! Utilizzando lo stesso metodo per calcolare $\log 3$ abbiamo una brutta sorpresa. Infatti l'errore stimato è

$$|E_{f,n}(x)| \le \max_{c\in[1,3]} \frac{\frac{n!}{c^{n+1}}}{(n+1)!}(3-1)^{n+1} = \max_{c\in[1,3]} \frac{1}{c^{n+1}(n+1)}2^{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1},$$

ovvero più grande via via che utilizziamo polinomi di grado più alto. Pertanto la "migliore approssimazione possibile" vicino a $x_0 = 1$ è tutt'altro che buona per calcolare $\log 3$.

Esercizio 11.1. *Sapendo che* $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$*, calcola i polinomi di Taylor di* $\arctan x$ *in* $x_0 = 0$ *e usali per calcolare approssimazioni di* π*. Puoi farlo (o gli errori crescono sempre di più come per* $\log 3$*)? Se puoi farlo, siamo in una situazione di rapida convergenza (come per e) o di lenta convergenza (come per* $\log 2$*)? Qual è il grado del polinomio di Taylor che ti permette di concludere che* $\pi \approx 3.14$ *alle prime due cifre decimali?*

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, 7 — I-56126 Pisa, Italy
E-mail address: a.saracco@sns.it